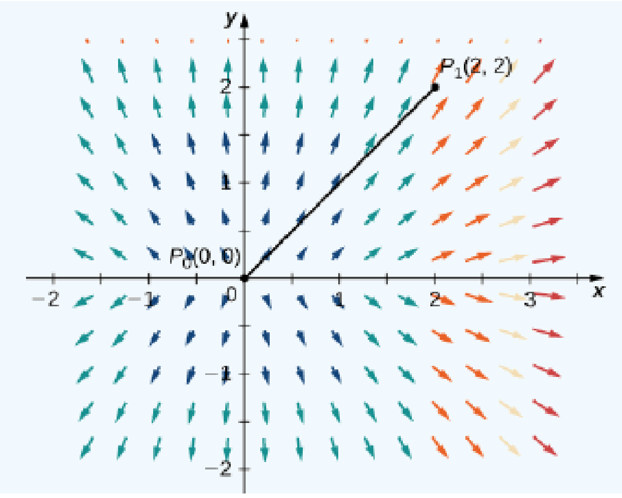
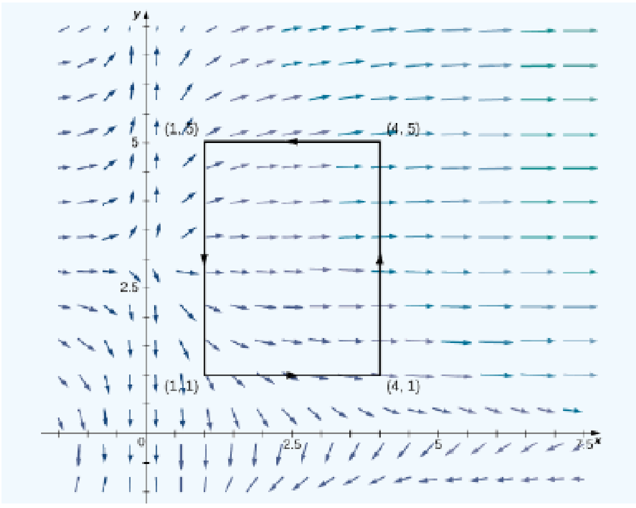
Métodos Matemáticos em Engenharia e Ciências da Terra– FCUL – DEGGE

Série de Exercícios 4



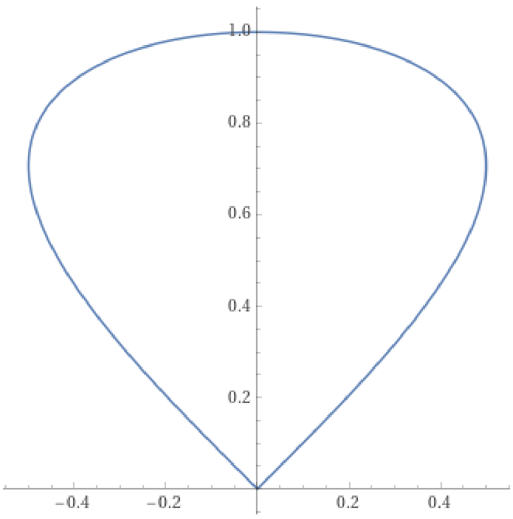
1) O integral de linha ao longo de uma curva $C = \{(x(t), y(t), z(t)), t \in [t_1, t_2]\}$ de um campo vetorial $\vec{F}$ é

$I = \int_C \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\overrightarrow{dr}}{dt} dt$. Aplique a fórmula anterior para calcular I com $\vec{F} = \vec{F}(x, y) = 2x\,\vec{e}_x + 4y\vec{e}_y = (2x, 4y)$ para o trajeto C que une o pontos P1=(0,0) a P2=(2,2) (ver fig. anexa). Comece por parametrizar a curva $\vec{r}(t)$ em função de t. Resposta: 12.



2) Use o teorema de Green da circulação para calcular o integral cíclico descrito em sentido direto, ao longo da curva plana sobre o plano x,y, com a sequência de vértices (1,1), (4,1), (4,5), (1,5) do campo vetorial:

$\vec{F}(x, y) = x^2 y\,\vec{e}_x + (y - 3)\vec{e}_y$. Compare com o método direto decompondo o integral cíclico na soma de 4 integrais de linha ao longo dos trajetos retilíneos que unem os vértices (pontos) consecutivos do retângulo. Teorema de Green da circulação: $\oint_{C=\partial D} (P\vec{e}_x + Q\vec{e}_y) \cdot \overrightarrow{dr} = \oint_{C=\partial D} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \oint_{C=\partial D} P dx + Q dy =$ $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$ = Circulação do campo vetorial $\vec{F}$.



3) O teorema acima permite exprimir a área plana A no plano (x,y) de um domínio D cuja fronteira é uma curva fechada C definida paramétricamente por $C = \{(x(t), y(t)), t \in [t_1, t_2]\}$ na forma:

$$A = \iint_D dx\, dy = \frac{1}{2} \oint_{C=\partial D} (-y dx + x dy) = \int_{t_1}^{t_2} [-y(t) \frac{dx}{dt} + x(t) \frac{dy}{dt}] dt$$

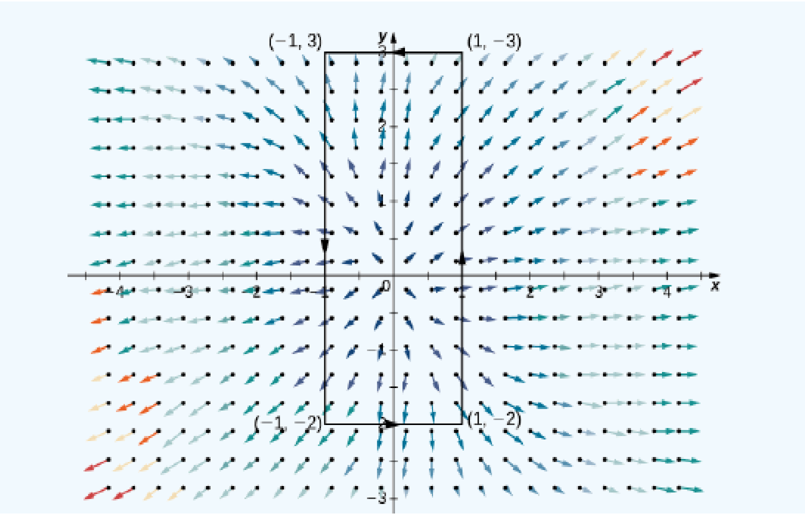
Nota: Utiliza-se $\vec{F} = -y\vec{e}_x + x\vec{e}_y$ no teorema de Green da circulação.

a) Utilizando o resultado acima exprima a área delimitada pela curva: $C = \{(\sin(t)\cos(t), \sin(t)), t \in [0, \pi]\}$ (figura anexa). Resposta 2/3.

b) Utilize a referida formulação para determinar a área no interior de uma elipse de raios maior e menor a, b respetivamente. Comece por escrever a equação da elipse e parametrizar a elipse através de uma variável angular $\theta \in [0,2\pi]$.

4)O teorema de Green do fluxo é um corolário do teorema de Green da circulação e exprime o fluxo de um campo vetorial bidimensional $\vec{F} = P(x,y)\vec{e}_x + Q(x,y)\vec{e}_y$ no plano (x,y) através de uma curva fechada C descrita em sentido direto na forma:

$\oint_{C=\partial D}(P\vec{e}_x + Q\vec{e}_y)\cdot\vec{n}\,dl = \oint_{C=\partial D}\vec{F}\cdot(\overrightarrow{dr}\times\vec{e}_z) = \oint_{C=\partial D}(-Qdx + Pdy) = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\,dy =$ $\iint_D\, div\,\vec{F}\,dx\,dy$ = Fluxo para o exterior de C, do campo vetorial $\vec{F}$ onde $\vec{n}$ é o versor normal apontando para o exterior e $dl = \|\overrightarrow{dr}\|$ é o elemento de arco.



Utilizando o teorema acima, calcule o fluxo de um campo de velocidades:

$\vec{v}(x,y) = (5x+y)\vec{e}_x + (x+3y)\vec{e}_y\ \ m/s$

através do retângulo de vértices (-1,-2), (1,-2), (1,-3) e (-1,3). Resposta: 80 m^2/s